Über die Approximation im starken Sinne

Von G. ALEXITS und D. KRÁLIK in Budapest

1. Einleitung

Vor einigen Jahren hat einer von uns[1]) das Problem der Approximation im starken Sinne aufgeworfen und teilweise gelöst. Dieses Problem besteht im folgenden: Bezeichne $\|\alpha_{nk}\|$ eine unendliche Zahlenmatrix und $s_n(f, x)$ die n-te Partialsumme der Entwicklung einer Funktion $f(x)$ nach einem in $[a, b]$ definierten Orthogonalsystem $\{\varphi_n(x)\}$. Wissen wir, daß die Mittel

$$t_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} s_k(f, x)$$

die Funktion $f(x)$ im gewöhnlichen Sinne mit der Geschwindigkeit $\omega_n \to 0$ approximieren, daß also

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} \{f(x) - s_k(f, x)\} \right| = O(\omega_n)$$

gilt, so wird gefragt, *mit welcher Geschwindigkeit die starken Mittel*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{nk}|\, |f(x) - s_k(f, x)|$$

gegen Null, und ob sie überhaupt gegen Null streben? Diese Fragestellung verschärft das bekannte Problem der starken Summierbarkeit.

Der Unterschied zwischen Approximation im gewöhnlichen und im starken Sinne ist wesentlich. Man betrachte z. B. die $(C, 1)$-Summen der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, welche bekanntlich zu $\frac{1}{2}$ streben. Da die Partialsummen s_n dieser Reihe den Wert 1 oder 0 haben, wird die Zahl $\frac{1}{2}$ durch die gewöhnlichen $(C, 1)$-Mittel mit der Annäherungsgeschwindigkeit

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} - s_k \right) \right| \leqq \frac{1}{2(n+1)}$$

[1]) G. ALEXITS, Une contribution à la théorie constructive des fonctions, *Acta Sci. Math.*, **19** (1958), 149–157.

approximiert, während für die starken $(C, 1)$-Mittel

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{2}-s_k\right| = \frac{1}{2}$$

gilt; d. h. die Approximation im gewöhnlichen Sinn ergibt die Annäherungsgeschwindigkeit $O(n^{-1})$, während für die im starken Sinne nur $O(1)$ folgt.

Wir wollen uns im folgenden mit der starken Approximation gewisser Mittel der Fourierreihe und der Orthogonalpolynom-Entwicklungen, wie auch einiger anderer Orthogonalentwicklungen beschäftigen. Um diese alle einheitlich behandeln zu können, bedienen wir uns des Begriffes der *polynomartigen Orthonormalsysteme* $\{\varphi_n(x)\}$, welcher auf die einheitliche Behandlung ähnlicher Fragen schon mit Erfolg angewendet wurde.[2]) Darunter verstehen wir ein Orthonormalsystem, dessen Kern von folgender Beschaffenheit ist:

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n}\varphi_k(t)\varphi_k(x) = \sum_{\mu=1}^{r}F_\mu(t, x)\sum_{i,j=-p}^{p}\gamma_{i,j,\mu}^{(n)}\varphi_{n+i}(t)\varphi_{n+j}(x),$$

wo die Konstanten $|\gamma_{i,j,\mu}^{(n)}|$ eine von n unabhängige gemeinsame Schranke C_1 haben, die natürlichen Zahlen p und r von n nicht abhängen, und die meßbaren Funktionen $F_\mu(t, x)$ die Relation

$$|F_\mu(t, x)| \leqq \frac{C_2}{|t-x|} \qquad (t \neq x)$$

für alle $x \in [a, b]$ mit absoluten Konstanten C_1 und C_2 erfüllen. Die polynomartigen Orthonormalsysteme umfassen das trigonometrische System, die orthogonalen Polynomsysteme, wie auch das Haarsche und das Walshsche Orthonormalsystem.

Wir werden das Problem der starken Approximation in dem Fall untersuchen, wo $s_n(f, x)$ die n-te Partialsumme der Entwicklung einer $L^2_{\varrho(x)}$-integrierbaren Funktion $f(x)$ nach einem polynomartigen Orthonormalsystem bedeutet, und als starke Mittel die Summen

$$\sum_{k=n}^{N_n}\frac{k^{q-1}}{n^q}|f(x)-s_k(f, x)|$$

mit einem $q>0$ gewählt werden. Es wird sich herausstellen, daß diese mit einem $N_n=O(n)$ $(N_n \geqq n)$ gebildeten starken Summen bis auf einen konstanten Faktor dieselbe Annäherungsgeschwindigkeit haben wie die im gewöhnlichen Sinn erreichbare beste Approximation mit dem System $\{\varphi_n(x)\}$. Darunter verstehen wir folgendes: Bezeichne

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)$$

eine Linearform höchstens n-ter Ordnung, welche mit den ersten $n+1$ Funktionen des geordneten Systems $\{\varphi_n(x)\}$ gebildet wurde. Die nicht negative Zahl

$$E_n(f) = \inf_{T_n}\sup_{a\leqq x\leqq b}|f(x)-T_n(x)|$$

2) Vgl. G. ALEXITS, *Convergence problems of orthogonal series* (Oxford—London—New York—Paris, 1961), 295—300.

heißt die mit den aus $\{\varphi_n(x)\}$ gebildeten Linearformen höchstens n-ter Ordnung erreichbare beste Approximation im Intervall $[a, b]$. Unser Hauptresultat ist ausgedrückt im folgenden

Satz 1. *Bezeichne $\{\varphi_n(x)\}$ ein im Intervall $[a, b]$ definiertes, konstantentreues,*[3] *polynomartiges Orthonormalsystem bezüglich der Gewichtsfunktion $\varrho(x) \geqq 0$. Gelten im Teilintervall $[c, d]$ von $[a, b]$ die Beziehungen*

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = O(n), \qquad 0 \leqq \varrho(x) \leqq K_1,$$

so gilt in jedem inneren Teilintervall von (c, d) die Beziehung

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |f(x) - s_k(f, x)| \leqq K_2 E_n(f)$$

gleichmäßig, wenn nur $N_n = O(n)$ ist.

Von den Konsequenzen dieses Satzes möchten wir eine hervorheben. Es ist bekannt, daß die beste polynomiale Annäherung $E_n(f)$ für die Klasse der Funktionen, die eine stetige r-te Ableitung $f^{(r)}(x)$ haben $\left(f^{(0)}(x) \equiv f(x)\right)$, von der Größenordnung $n^{-r}\omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)$ ist, wo

$$\omega(\delta, f^{(r)}) = \sup_{\substack{|x'-x| \leqq \delta \\ x, x' \in [a, b]}} |f^{(r)}(x') - f^{(r)}(x)|,$$

also den Stetigkeitsmodul von $f^{(r)}(x)$ bedeutet. Danach folgt aus Satz 1 unmittelbar der

Satz 2. *Gilt $0 < m \leqq \varrho(x) \leqq M$ für $x \in [c, d]$, und ist $f(x)$ eine r-mal stetig differenzierbare Funktion, so besteht bei $N_n = O(n)$ in jedem inneren Teilintervall von (c, d) die Beziehung*

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |f(x) - s_k(f, x)| \leqq \frac{K_3 \omega\left(\frac{1}{n}, f^{(r)}\right)}{n^r}$$

gleichmäßig, wenn die $s_k(f, x)$ die Partialsummen der Entwicklung von $f(x)$ nach dem Orthogonalpolynomsystem, welches durch $\varrho(x)$ bestimmt ist, bedeuten.

Ein Vorteil unseres starken Summationsverfahrens besteht darin, daß wir daraus auf die Approximationseigenschaften der starken Riesz-Summation $(R, n^q, 1)$ schließen können. Bezeichne nämlich

$$h_n(f, x, q) = \frac{1}{n^q} \sum_{k=1}^{n} k^{q-1} |f(x) - s_k(f, x)|$$

das n-te starke $(R, n^q, 1)$-Mittel, so folgt, wie wir es sehen werden, aus Satz 2 leicht der

[3]) Das System $\{\varphi_n(x)\}$ heißt konstantentreu, wenn für alle konstanten Funktionen $f(x) \equiv c$ die Beziehung $s_n(f, x) \equiv c$ gilt $(n = 0, 1, \ldots)$.

Satz 3. *Gilt* $0<m\leqq\varrho(x)\leqq M$ *in* $[c,d]$, *und hat* $f\in L^2_{\varrho(x)}$ *eine r-te Ableitung, welche der Lipschitzbedingung*

$$\sup_{x,x'\in[a,b]}\frac{|f^{(r)}(x')-f^{(r)}(x)|}{|x'-x|^{\alpha}}\leqq K_4\qquad(0<\alpha\leqq 1)$$

genügt, so approximieren die starken $(R, n^q, 1)$*-Mittel der durch die Gewichtsfunktion* $\varrho(x)$ *bestimmten Orthonormalpolynomentwicklung von* $f(x)$ *in jedem inneren Teilintervall von* (c,d) *gleichmäßig mit der Annäherungsgeschwindigkeit*

$$h_n(f,x,q)=O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right),$$

wenn nur $q>r+\alpha$ *ist.*

Für die (trigonometrische) Fourierentwicklung gelten die entsprechenden Behauptungen im ganzen Grundintervall $[0,2\pi]$.

Wir wollen endlich noch bemerken, daß der Satz 1 auch über das Approximationsvermögen der Partialsummen $s_n(f,x)$ einer Entwicklung nach einem konstantentreuen polynomartigen Orthonormalsystem einen gewissen Aufschluß gibt. Es zeigt sich nämlich, daß die Indizes der „schlecht" approximierenden Partialsummen ziemlich gleichverteilt von der Dichte Null sind, welche Tatsache wir in unserem Satz 4 genauer beschreiben werden.

2. Beweis der Sätze 1—3

Beim Beweis der Sätze 1—3 stützen wir uns auf das

Fundamentallemma: *Sei* $\{\varphi_n(x)\}$ *ein konstantentreues polynomartiges Orthonormalsystem bezüglich der Gewichtsfunktion* $\varrho(x)\geqq 0$ *und* $f(x)$ *im Grundintervall* $[a,b]$ *beschränkt:* $|f(x)|\leqq M$. *Bestehen im Teilintervall* $[c,d]$ *die Voraussetzungen des Satzes 1, so gilt in einem jeden inneren Teilintervall* $[c+h, d-h]$ *mit* $h>0$ *die Ungleichung*

$$\frac{1}{n^q}\sum_{k=n}^{N_n}k^{q-1}|s_k(f,x)|\leqq KM,$$

wobei die Konstante K von c, d, h und q, nicht aber von n und x abhängt.

Zum Beweis zerlegen wir die obige Summe in drei Teile:

$$\frac{1}{n^q}\sum_{k=n}^{N_n}k^{q-1}|s_k(f,x)|=\frac{1}{n^q}\sum_{k=n}^{N_n}k^{q-1}\left|\int_a^b f(t)\varrho(t)\sum_{m=0}^{k}\varphi_m(t)\varphi_m(x)\,dt\right|\leqq$$

$$\leqq\frac{1}{n^q}\sum_{k=n}^{N_n}k^{q-1}\left|\int_a^c+\int_d^b\right|+\frac{1}{n^q}\sum_{k=n}^{N_n}k^{q-1}\left|\int_c^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{d}\right|+\frac{1}{n^q}\sum_{k=n}^{N_n}k^{q-1}\left|\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}\right|=$$

$$=S_1+S_2+S_3,$$

wo die natürliche Zahl n so groß sein soll, daß die Punkte $x-\dfrac{1}{n}$, $x+\dfrac{1}{n}$ im Intervall

(c, d) liegen. Da das System $\{\varphi_n(x)\}$ polynomartig ist, erhalten wir für S_1:

$$S_1 \leqq \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |\gamma_{i,j,\mu}^{(k)}| \, |\varphi_{k+j}(x)| \left| \left(\int_a^c + \int_d^b \right) f(t) F_\mu(t, x) \varphi_{k+i}(t) \varrho(t)\, dt \right|.$$

Sei $\psi(t)$ die folgende Funktion:

$$\psi(t) = \begin{cases} f(t) F_\mu(t, x) & \text{für} \quad t \in [a, c] \cup [d, b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das letzte Integral bedeutet dann den $k+i$-ten Fourierkoeffizienten b_{k+i} in der Entwicklung der Funktion $\psi(t)$ nach dem System $\{\varphi_n(x)\}$. Nach der Cauchyschen bzw. Besselschen Ungleichung ergibt sich die folgende Abschätzung:

$$S_1 \leqq \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \frac{1}{n^q} \left\{ \sum_{k=n}^{N_n} k^{2q-2} |\gamma_{i,j,\mu}^{(k)}|^2 \varphi_{k+j}^2(x) \sum_{k=n}^{N_n} b_{k+i}^2 \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \frac{C_1}{n^q} \left\{ \sum_{k=n}^{N_n} k^{2q-2} \varphi_{k+j}^2(x) \left(\left(\int_a^c + \int_d^b \right) f^2(t) F_\mu^2(t, x) \varrho(t)\, dt \right) \right\}^{1/2}.$$

Der Wert des letzten Integrals ist wegen $|t-x| \geqq h$ und $f^2(t) \leqq M^2$ nicht größer, als

$$\frac{M^2 C_2^2}{h^2} \int_a^b \varrho(t)\, dt = K_5^2 M^2,$$

und da $N_n \leqq K_6 n$ ist, erhalten wir auf Grund der Voraussetzungen des Satzes 1 für S_1:

$$S_1 \leqq \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{j=-p}^{p} C_1 K_5 M \frac{N_n^{q-1}}{n^q} \left\{ \sum_{k=n}^{N_n} \varphi_{k+j}^2(x) \right\}^{\frac{1}{2}} \leqq \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{j=-p}^{p} K_7 M n^{-\frac{1}{2}} \leqq K_8 M.$$

Zur Abschätzung des Ausdrucks

$$S_2 \leqq \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} \frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |\varphi_{k+j}(x)| \, |\gamma_{i,j,\mu}^{(k)}| \left| \left(\int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d} \right) f(t) F_\mu(t, x) \varphi_{k+i}(t) \varrho(t)\, dt \right|$$

verfahren wir ganz analog. Wir erhalten wie oben:

$$S_2 \leqq \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} K_9 n^{-q} n^{q-\frac{1}{2}} \left\{ \left(\int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d} \right) f^2(t) F_\mu^2(t, x) \varrho(t)\, dt \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \sum_{\mu=1}^{r} \sum_{i,j=-p}^{p} K_9 n^{-\frac{1}{2}} M K_1^{1/2} C_2 \left\{ \left(\int_c^{x-\frac{1}{n}} + \int_{x+\frac{1}{n}}^{d} \right) \frac{dt}{(t-x)^2} \right\}^{1/2}.$$

Der Klammerausdruck ist nicht größer, als $(2n)^{1/2}$; so daß sich endlich für S_2 die Beziehung

$$S_2 \leqq K_{10} M$$

ergibt.

Zur Abschätzung von S_3 machen wir von der speziellen Struktur der Kernfunktion $K_n(t, x)$ keinen Gebrauch. Auf Grund unserer Voraussetzungen ergibt sich nämlich unmittelbar

$$S_3 \leqq \frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} \left\{ \int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f^2(t)\varrho(t)\,dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_a^b \left(\sum_{m=0}^{k} \varphi_m(t)\varphi_m(x) \right)^2 \varrho(t)\,dt \right\}^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K_{11} n^{-q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} M K_1^{1/2} n^{-\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=0}^{k} \varphi_m^2(x) \right)^{1/2} \leqq$$

$$\leqq K_{12} n^{-q-\frac{1}{2}} M \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-\frac{1}{2}} \leqq K_{13} M n^{-q-\frac{1}{2}} n^{q+\frac{1}{2}} = K_{13} M.$$

Durch Addition der Abschätzungen bezüglich S_1, S_2 und S_3 erhalten wir

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |s_k(f, x)| \leqq (K_8 + K_{10} + K_{13}) M,$$

womit unsere Behauptung mit $K = K_8 + K_{10} + K_{13}$ bewiesen ist.

Der Beweis des Satzes 1 ist nun recht einfach. Sei nämlich $T_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_k(x)$ die aus den ersten $n+1$ Funktionen des Systems $\{\varphi_n(x)\}$ gebildete Linearform, welche die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a, b]$ am besten approximiert. Dann haben wir:

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |s_k(f, x) - f(x)| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} \{ |s_k(f, x) - s_k(T_n, x)| + |s_k(T_n, x) - T_n(x)| + |T_n(x) - f(x)| \}.$$

Auf Grund der evidenten Beziehungen

$$s_k(f, x) - s_k(T_n, x) = s_k(f - T_n, x), \quad s_k(T_n, x) \equiv T_n(x) \quad \text{für } k \geqq n,$$
$$|T_n(x) - f(x)| \leqq E_n(f),$$

ergibt sich dann aus unserem Fundamentallemma die Behauptung des Satzes 1.

Was den Beweis des Satzes 2 anbetrifft, folgt aus der Bedingung $0 < m \leqq \varrho(x) \leqq M$ bekanntlich[4]) die Beziehung $\sum_{k=0}^{n} \varphi_k^2(x) = O(n)$ in jedem inneren Teilintervall von $[c, d]$, daher ist der Satz 2 auf Grund klassischer Approximationssätze eine Folge des Satzes 1.

[4]) G. Freud, Über die starke $(C, 1)$-Summierbarkeit orthogonaler Polynomreihen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 3 (1952), 83–88.

Es seien nun die Voraussetzungen des Satzes 3 erfüllt. Schreiben wir dann die Größe $h_n(f, x, q)$ in der Form

$$h_n(f, x, q) = \frac{1}{n^q}\sum_{k=1}^{n} k^{q-1}|f(x)-s_k(f, x)| \leqq \frac{1}{n^q}\sum_{j=0}^{m} 2^{jq}\frac{1}{2^{jq}}\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} k^{q-1}|f(x)-s_k(f, x)|,$$

wo die natürliche Zahl m durch die Ungleichung $2^{m-1} \leqq n < 2^m$ definiert ist. Aus dem Satz 2 folgt

$$\frac{1}{2^{jq}}\sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} k^{q-1}|f(x)-s_k(f, x)| = O\left(\frac{1}{2^{j(r+\alpha)}}\right).$$

Bei Beachtung von $q > r+\alpha$ erhalten wir also für $h_n(f, x, q)$ die Abschätzung

$$h_n(f, x, q) = O(n^{-q})\sum_{j=0}^{m} 2^{j(q-r-\alpha)} = O(n^{-q})2^{m(q-r-\alpha)} = O(n^{-q})n^{q-r-\alpha} = O(n^{-r-\alpha}),$$

womit auch der Satz 3 bewiesen ist.

3. Das Approximationsvermögen der Partialsummen

Unsere Sätze 1—3 legen es nahe, daß schon die einzelnen Partialsummen $s_n(f, x)$ im allgemeinen die Approximationsgeschwindigkeit der starken Mittel erreichen, d. h. daß die Partialsummen $s_{n_k}(f, x)$, welche die Funktion $f(x)$ schlechter approximieren als die starken Mittel, nur selten vorkommen können. Die genaue Formulierung dieser Tatsache befindet sich im folgenden

Satz 4. *Sei $f(x)$ eine r-mal stetig differenzierbare Funktion mit $f^{(r)} \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$. Bezeichne $\lambda(x) > 0$ eine beliebige monoton gegen Unendlich strebende Funktion und $\nu(n)$ bzw. $\bar{\nu}(n)$ die Anzahl jener Indizes $n_k \leqq n$ bzw. $n \leqq n_k \leqq 2n$, für welche im Punkt $x \in (c, d)$ die Ungleichung*

$$|s_{n_k}(f, x)-f(x)| \geqq \frac{\lambda(n_k)}{n_k^{r+\alpha}}$$

besteht. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu(n)}{n} = 0 \quad bzw. \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\bar{\nu}(n)}{n} = 0,$$

wobei die Menge $\{n_k\}$ im allgemeinen mit x variiert.

Nach Satz 3 ist nämlich

$$\frac{K_{14}}{n^{r+\alpha}} \geqq \frac{1}{n^q}\sum_{k=0}^{n} k^{q-1}|s_k(f, x)-f(x)| \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{n^q}\sum_{n_k\leqq n} n_k^{q-1}|s_{n_k}(f, x)-f(x)| \geqq \frac{1}{n^q}\sum_{n_k\leqq n}\lambda(n_k)n_k^{q-1-r-\alpha}.$$

Wir wählen $q > r+\alpha$ derart, daß $r+\alpha > q-1$, dann ist $n_k^{q-1-r-\alpha} = n_k^{-\beta}$ mit $\beta > 0$. Da $\lambda(x)$ nach Annahme beliebig langsam wächst, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\{\lambda(n)\}$ so wählen, daß $\{\lambda(n)n^{-\beta}\}$ monoton abnimmt, und daher statt der letzten Summe $v(n)\lambda(n)n^{q-1-r-\alpha}$ geschrieben werden darf. Dann ist

$$\frac{K_{14}}{n^{r+\alpha}} \geqq \frac{v(n)}{n} \cdot \frac{\lambda(n)}{n^{r+\alpha}},$$

oder mit anderen Worten

$$\frac{v(n)}{n} \leqq \frac{K_{14}}{\lambda(n)} = o(1).$$

Der Beweis unserer zweiten Behauptung verläuft ganz auf dieselbe Weise:

$$\frac{K_2}{n^{r+\alpha}} \geqq \frac{1}{n^q} \sum_{n \leqq n_k \leqq 2n} n_k^{q-1} |s_{n_k}(f, x) - f(x)| \geqq \frac{\bar{v}(n)}{n} \frac{\lambda(2n)}{n^{r+\alpha}} 2^{q-1-r-\alpha};$$

also gilt

$$\frac{\bar{v}(n)}{n} \leqq \frac{2^{r+\alpha}}{2^{q-1}} \cdot \frac{K_2}{\lambda(2n)} = o(1).$$

Der soeben bewiesene Satz drückt jene Eigenschaft der Partialsummenfolge $\{s_n(f, x)\}$ aus, von welcher wir in der Einleitung gesprochen haben, nämlich daß die „schlechten" Indizes n_k in der Menge aller natürlichen Zahlen von der Dichte Null sind $\left(\frac{v(n)}{n} \to 0\right)$, ferner daß sie „ziemlich gleichverteilt" sind, also sich nicht an einzelnen Stellen verdichten, da sie ja auch zwischen n und $2n$ nur „selten" auftreten $\left(\frac{\bar{v}(n)}{n} \to 0\right)$.

4. Der Annäherungsgrad der Rieszschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen

In einer früheren Arbeit[5]) haben wir einen Approximationssatz bezüglich der starken de la Vallée—Poussinschen Mittel allgemeiner Orthogonalreihen veröffentlicht, welcher einen Satz von TANDORI[6]) verschärft. Wir wollen nun unseren in [5]) bewiesenen Satz weiter verschärfen:

Satz 5. *Sei $\{\varphi_n(x)\}$ ein beliebiges, in $[a, b]$ definiertes Orthogonalsystem und $\lambda(x)$ eine positive, für $x \to \infty$ monoton gegen Unendlich strebende, von unten konkave Funktion. Sei ferner $\Sigma c_n^2 \lambda^2(n) < \infty$ und*

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda(k) \varphi_k(x), \quad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x).$$

Sind die starken Mittel

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |S_k(x)| \qquad (N_n = O(n))$$

[5]) G. ALEXITS—D. KRÁLIK, Über die Approximation mit starken de la Vallée—Poussinschen Mitteln, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **16** (1965), 43—49.

[6]) K. TANDORI, Über Approximationen mit allgemeinen Orthogonalreihen, *Annales Univ. Sci. Budapest*, **3—4** (1960/61), 351—356.

auf der Menge $E \subset [a, b]$ beschränkt, so gilt für die starken $(R, n^q, 1)$-Mittel der Orthogonalreihe

$$\sum c_n \varphi_n(x)$$

auf E fast überall die Beziehung

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |s_k(x) - f(x)| = O_x\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right),$$

wobei $f(x)$ die als Limes im Mittel bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmte Funktion bedeutet.

Unser Satz folgt leicht aus dem folgenden reihentheoretischen

Hilfssatz. *Die Teilsummen S_n der Reihe $\sum a_n$ sollen der Bedingung*

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |S_k| \leqq K$$

genügen, bezeichne ferner $\lambda(x)$ die Funktion im Satz 5. Gibt es eine Indexfolge $\{\mu_m\}$ derart, daß S_{μ_m} wie auch

$$s_{\mu_m} = \sum_{k=0}^{\mu_m} \frac{a_k}{\lambda(k)}$$

gegen die Grenzwerte S bzw. s konvergieren, so gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |s_k - s| \leqq \frac{C(K, S)}{\lambda(n)}.$$

Der Beweis des Hilfssatzes verläuft analog zu dem des entsprechenden Hilfssatzes in unserer Note[5]), von dessen Beweis wir somit absehen können.

Aus diesem Hilfssatz erhalten wir den Satz 5 leicht. Wegen des Riesz—Fischerschen Satzes konvergieren die Partialsummen $s_n(x)$ bzw. $S_n(x)$ in $L^2[a, b]$ gegen Funktionen $f(x)$ bzw. $f^*(x)$. Wir können dann eine Indexfolge $\{\mu_m\}$ derart auswählen, daß die Partialsummen $s_{\mu_m}(x)$ und $S_{\mu_m}(x)$ auch punktweise fast überall gegen $f(x)$ bzw. $f^*(x)$ konvergieren. Nach unserem Hilfssatz besteht also auf der Menge E fast überall die behauptete Relation

$$\frac{1}{n^q} \sum_{k=n}^{N_n} k^{q-1} |s_k(x) - f(x)| = O_x\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right),$$

womit der Satz 5 bewiesen ist.

(Eingegangen am 4. September 1964)